III.

MÉMOIRE SUR LA GNOMONIQUE,

par le général G.-H. DUFOUR.

AVERTISSEMENT.

Il est nécessaire, pour l'intelligence de ce petit ouvrage, d'avoir quelques notions élémentaires d'astronomie, telles qu'on les présente ordinairement dans les traités de sphère, et de connaître le calcul des logarithmes appliqué à la trigonométrie rectiligne.

PRÉLIMINAIRES.

1. Si, en un lieu quelconque de la terre, on imagine une ligne dirigée au pôle, elle sera parallèle à l'axe du monde, vu la petitesse de notre globe comparativement à la vaste étendue des cieux. On peut même, sans erreur appréciable, prendre une de ces lignes pour l'autre, et regarder la parallèle à l'axe comme l'axe même du monde.

2. Le soleil se mouvra dans un cercle perpendiculaire à cette ligne [1] ; et si, à partir du point de

1. On substitue ici, pour plus de simplicité dans le raisonnement, le mouvement apparent au mouvement réel, le résultat étant le même.

ce cercle qui se trouve dans le méridien du lieu, on compte des arcs de 15 degrés, les plans menés par l'axe et par les points de division du cercle seront les *plans horaires*, c'est-à-dire ceux dans lesquels le soleil se trouve à la fin de chaque heure écoulée ; car vingt-quatre fois quinze degrés font la circonférence entière.

3. Coupons ce système par un plan quelconque : le *méridien*, c'est-à-dire celui des plans horaires qui est vertical, et qui, par conséquent, partage le jour en deux parties égales, donnera une droite sur laquelle l'axe percera quelque part le plan coupant. Et les autres plans horaires donneront des droites, qui toutes passeront par ce point.

4. L'ensemble de ces lignes forme un cadran solaire : la première ligne en est la *méridienne;* les autres en sont les *lignes horaires;* et le point de convergence, intersection de l'axe avec le cadran, en est le *centre*.

5. Si dans une autre localité, ramenée au même méridien, on construit un plan parallèle au premier, on aura les mêmes lignes d'intersection, avec les plans horaires. D'où il suit, qu'en un lieu donné, on peut toujours construire un cadran pareil en tout point à celui d'une autre localité, pourvu qu'après l'avoir ramené sous le même méridien, on s'arrange de manière à ce que les plans coupants soient parallèles dans l'espace. Si, par

exemple, le cadran est horizontal dans une des localités, il suffira d'incliner son plan dans l'autre localité, d'une quantité égale à la différence de leurs latitudes, pour que les deux plans se présentent de la même manière au soleil, et que les cadrans soient égaux. Les Romains ne connaissaient pas cette propriété, quand ils placèrent au forum un cadran qu'ils avaient apporté de Catane en Sicile. Il ne put point servir, parce qu'ils le posèrent horizontalement ; ils auraient dû lui donner une inclinaison de $4^{\circ}\ 26'$, qui est la différence des latitudes de Rome et de Catane.

6. On donne un corps à l'axe du cadran en substituant une tige métallique bien dressée à la ligne mathématique dirigée au pôle. Alors l'ombre de cette tige sur le cadran indique, *en temps vrai*, l'heure qu'il est lorsqu'elle arrive sur les lignes horaires ; car cette ombre n'est autre chose que la trace du plan qui passe par l'axe et par le soleil, c'est-à-dire du plan horaire lui-même.

7. Lorsqu'au jour de l'équinoxe le soleil se meut dans le plan de l'équateur, le rayon qui passe par l'extrémité de la tige ou *style* est constamment perpendiculaire à cette tige ; en sorte qu'il décrit le plan même de l'équateur. Et, comme en ce moment, les jours sont égaux aux nuits, on donne le nom de *ligne équinoxiale* à l'intersection de ce plan avec le cadran.

8. Un autre jour, le soleil ayant une déclinaison, ou s'écartant d'une certaine quantité de l'équateur, le rayon qui passe par l'extrémité du style ne décrit plus un plan, mais une surface conique, dont l'intersection avec le cadran s'appelle *courbe diurne*, parce que l'extrémité de l'ombre projetée par le style la parcourt un certain jour. C'est une hyperbole, attendu qu'en prenant deux déclinaisons égales (l'une australe et l'autre boréale), on a les deux nappes d'un même cône, lesquelles sont coupées par le plan du cadran, et donnent par conséquent les deux branches d'une même hyperbole.

9. La projection du style sur le cadran est appelée en gnomonique *soustylaire;* et, comme le plan de l'équateur et l'axe du monde sont perpendiculaires l'un à l'autre dans l'espace, il s'ensuit que *dans toute espèce de cadran plan, la ligne équinoxiale forme avec la soustylaire un angle droit;* car on démontre en géométrie que, si une droite et un plan sont perpendiculaires dans l'espace, la projection de la droite et la trace du plan sur un second plan donné sont deux droites perpendiculaires entre elles.

10. Lorsque le style est dans le plan méridien, ce qui a lieu pour les cadrans horizontaux et pour les verticaux directement tournés vers le sud, la soustylaire se confond avec la méridienne du ca-

dran ; dans ces cas, la ligne équinoxiale est donc perpendiculaire à la méridienne. Mais quand le cadran vertical est oblique, ou, en d'autres termes, lorsqu'il dévie, ou se tourne vers l'occident ou vers l'orient, la soustylaire ne se confond plus avec la méridienne : elle tombe à droite quand le cadran dévie à l'ouest, à gauche quand il dévie à l'est.

11. Puisque le style est parallèle à l'axe du monde, l'angle qu'il fait avec une méridienne horizontale est égal à la *latitude du lieu*, laquelle se mesure, comme on sait, par la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon ; et l'angle qu'il fait avec la verticale en est le complément. La *hauteur du style* sera toujours mesurée dans le plan du méridien : c'est la distance de l'extrémité du style à la méridienne du cadran. Cette ligne ne se confond avec la perpendiculaire au plan que dans le cadran horizontal et dans le cadran vertical direct. Nous la représenterons toujours par h dans les calculs qui vont suivre, que le cadran soit direct ou oblique, vertical ou incliné. On évitera ainsi toute méprise dans l'emploi des formules.

12. Si la marche du soleil était régulière, la méridienne et les lignes horaires d'un cadran suffiraient pour marquer les divisions du temps. Mais il n'en est rien ; et, quand ces lignes donnent les heures par rapport au passage du soleil par le méridien, elles ne donnent pas celles d'une

horloge bien réglée ; car, excepté quatre jours dans l'année, il y a toujours une différence entre le *temps vrai* donné par le soleil, et le *temps moyen* indiqué par l'horloge. Cette différence va jusqu'à environ un quart d'heure en plus et en moins ; on la nomme *équation du temps*, et on la trouve jour par jour dans les éphémérides. Si donc on veut que le cadran solaire puisse servir à régler les montres, il ne faut pas se contenter des lignes horaires, mais tracer la *courbe du temps moyen* pour midi. C'est une courbe en forme de 8, telle qu'il est midi à l'horloge quand elle est coupée par l'extrémité de l'ombre du style ; et le temps que met l'ombre à passer de cette courbe à la méridienne, ou de la méridienne à la courbe, suivant les saisons, est égal à l'équation du temps.

13. L'angle que l'équateur fait avec l'écliptique n'est pas constant, en sorte que les déclinaisons du soleil ne restent pas rigoureusement les mêmes. Il y a aussi des variations dans l'équation du temps, qui deviennent sensibles avec les siècles. D'où résulte qu'un cadran qui a été construit à une certaine époque, ne peut plus servir pour une époque trop éloignée. Un bon cadran doit être renouvelé tous les siècles ; au bout de ce temps, il y a presque une minute de différence dans les déclinaisons extrêmes, celles qui sont relatives aux solstices.

14. Les cadrans solaires se tracent graphiquement, ou au moyen de points déterminés par le calcul. Cette seconde méthode est la seule qui ait une exactitude suffisante dans l'application et pour les tracés en grand, les constructions graphiques ne pouvant convenir qu'à des épures faites sur le papier. Cependant ces constructions ne sont pas absolument inutiles : elles servent à la détermination de certaines lignes ; et, de plus, elles facilitent les recherches, en jetant du jour sur la théorie.

15. C'est aux calculs que nous nous attacherons de préférence ; mais, avant d'y entrer, nous dirons qu'on remplace ordinairement le style par une plaque percée d'un trou rond, parce que l'image du soleil qui se voit au milieu de l'ombre portée par la plaque, a plus de netteté et marque mieux le point où tombe le rayon solaire, que l'extrémité de l'ombre du style, surtout lorsqu'il est d'une certaine longueur. On supprime alors le style, et on ne conserve que la plaque orientée de telle sorte qu'elle se confonde avec le plan de l'équateur, de manière à recevoir sous le même angle les rayons extrêmes. Cependant on détermine toujours le point où l'axe ou style, s'il existait, viendrait percer le cadran : puisque ce point, qui en est le centre, est celui où viennent converger toutes les lignes horaires, et qui sert à toutes les constructions.

16. Il convient aussi d'indiquer préalablement comment on peut déterminer la méridienne d'un lieu ; car cette détermination est nécessaire pour la construction de toute espèce de cadran. Ce qui suit est extrait d'une instruction sur le sujet, faite par le professeur M.-A. Pictet, et publiée à Genève en 1807.

Tracé d'une méridienne.

17. « On choisira, sur un plan horizontal bien dressé, un point autour duquel on décrira deux ou trois arcs de cercle concentriques, distants l'un de l'autre d'environ un quart de pouce, et de l'étendue de 130 à 140 degrés.

» On élèvera, perpendiculairement sur ce centre, un style de la longueur convenable, pour que, vers neuf heures du matin, l'extrémité de l'ombre se trouve un peu en dehors du plus grand des trois cercles tracés.... Puis on observera le moment précis où l'extrémité de l'ombre se trouvera sur chacun des trois cercles, qu'elle coupera à mesure que le soleil s'élèvera ; et on marquera d'un trait fin, sur chacune des circonférences, l'endroit précis où l'extrémité de l'ombre les aura respectivement traversées.

» Après midi on surveillera le moment auquel la pointe de l'ombre s'approchera du cercle intérieur, et on marquera de même d'un trait l'endroit où chacune des circonférences sera coupée par l'extrémité de l'ombre.

» Alors, avec un compas ordinaire, on partagera en deux parties égales l'arc de chaque circonférence compris entre le point marqué le matin et celui marqué l'après-midi ; et, posant ensuite le bord d'une règle bien droite, d'une part, sur le centre commun des trois cercles, et d'autre part, sur la bissection des trois arcs, la ligne tirée le long de cette règle sera la *méridienne;* et si les trois bissections se trouvent confondues dans cette ligne, on aura la preuve de l'exactitude de l'opération. Sinon, on donnera à la ligne une direction moyenne entre ces trois résultats.

18. » La méridienne, ainsi tracée, n'est sensiblement exacte que lorsqu'on opère dans l'une des saisons qui répondent aux solstices. Vers les équinoxes, elle exige une correction d'environ un quart de minute, ou quinze secondes de temps, dont elle se trouve trop à l'occident vers l'équinoxe du printemps, et trop à l'orient vers celui d'automne, en supposant qu'il se soit écoulé environ six heures entre les observations du matin et celles du soir. On peut facilement faire cette correction, en observant la quantité de chemin que fait l'ombre en une minute, immédiatement avant ou après midi ; le quart de cette quantité sera la

correction, qu'on aura soin d'appliquer dans le sens convenable avant de tracer la méridienne définitive. »

19. Il est ensuite très-facile de reporter la méridienne sur un plan vertical, au moyen d'un fil à plomb ; car ces deux lignes, qui se confondent à l'œil, déterminent le méridien, dont l'intersection avec le plan vertical donne la méridienne sur ce plan. C'est ainsi qu'on passe de l'une à l'autre.

20. L'inconvénient de cette méthode est de déterminer une ligne importante par des points trop rapprochés pour qu'on puisse compter sur l'exactitude de l'opération, indépendamment de la quantité plus ou moins appréciable dont la déclinaison du soleil varie entre les heures du matin et celles du soir.

21. On aura plus d'exactitude en se servant d'une grande boussole à lunette, après en avoir vérifié la déclinaison ; elle donnera, par le retournement de la lunette, deux points aussi éloignés qu'on voudra, où l'on plantera des jalons. Et l'on aura ainsi sur la méridienne une longue ligne bien assujétie, que le terrain soit incliné ou horizontal.

Une montre bien réglée fera aussi connaître, par l'équation du temps, le moment précis où le soleil arrive au *midi vrai*. Il est alors dans le méridien, et l'ombre d'un jalon bien dressé donne sur le sol la direction de la méridienne.

Le mieux est de contrôler ces deux moyens l'un par l'autre.

22. Passons aux calculs, en suivant une méthode directe pour chaque cas particulier. Cela est plus clair et plus satisfaisant, que de se servir d'une formule générale pour l'appliquer à toutes les circonstances en en modifiant d'une manière convenable les divers éléments.

ARTICLE PREMIER.

CALCULS D'UN CADRAN HORIZONTAL.

23. La ligne méridienne du cadran, déterminée comme il est dit au n° 17, est la ligne AB. Le style perce le plan horizontal du cadran au point A qui en marque le centre (fig. 1re).

Le plan méridien, tournant autour de sa trace, est rabattu en ABC. Dans ce plan, la ligne AC représente le style du cadran dirigé sur le pôle, et CB le rayon solaire équatorial à midi; il est perpendiculaire à AC, et détermine le point B, par lequel la ligne équinoxiale EF doit passer. Celle-ci est d'ailleurs perpendiculaire sur AB; elle est donc déterminée.

Les données sont la hauteur h de l'extrémité C du style, représentée par la perpendiculaire CQ; la latitude L du lieu, ou l'angle que fait le style avec la méridienne ; et la déclinaison δ du soleil à un jour donné.

24. Représentons d'abord par a et b les longueurs du style et du rayon équatorial, par q et q' leurs projections sur le cadran. On pourra déterminer les valeurs numériques de ces quatre quantités en construisant exactement, sur du carton, le triangle ACB ; ou bien se servir des valeurs algébriques suivantes, fournies par le même triangle.

$$a = \frac{h}{\sin L}, \quad b = \frac{h}{\cos L} \;;$$
$$q = h \cot L \;, \; q' = h \operatorname{tang} L.$$

25. Maintenant, si nous rabattons le plan équatorial en le faisant tourner autour de sa trace EF, le point C, extrémité du style contenue dans ce plan et qui se projette en Q, tombera en C′ sur la perpendiculaire AB à la trace EF, à une distance BC′ égale à BC. En sorte que si l'on mène la ligne C′E, faisant avec C′B un angle H égal à l'angle horaire dont on veut s'occuper, angle qui se mesure dans le plan de l'équateur (n° 1), la ligne AE sera, sur le cadran, la *ligne horaire* correspondante. Elle coupe la ligne équinoxiale à une distance BE de la méridienne, que nous représenterons par r, et dont la valeur est, par le triangle EBC′,

$$r = b \operatorname{tang} H. \qquad [1]$$

Cette ligne est donc parfaitement assujétie. puisque d'ailleurs elle doit passer par le point A, dont la position est déterminée. En sorte que si l'on se borne à tracer les lignes horaires, comme cela a lieu ordinairement pour les cadrans de jardin, tout est dit, la formule [1] donnant les distances à la méridienne des lignes horaires correspondantes aux diverses valeurs de H, telles que 15°, 30°, etc., pour les lignes de une heure, de deux heures, etc.

26. Mais si l'on veut les *lignes diurnes*, telles que DMN, il faut encore déterminer, sur chaque ligne horaire, la position du point M appartenant à la courbe ; et, pour cela, il n'y a rien de mieux que de calculer la distance EM de la courbe à la ligne équinoxiale, suivant la ligne horaire elle-même.

Or, en faisant tourner le plan horaire autour de sa trace AE, comme charnière, pour le rabattre sur le plan horizontal, le triangle AEC″ rectangle en C″ et dans lequel AC″ = AC, donnera la position du style et celle du rayon équatorial. Menant donc par le point C″ une ligne C″M, sous l'angle de déclinaison δ, son intersection avec AE donnera le point cherché M. En effet, le soleil décrivant un cercle parallèle à l'équateur (du moins très-sensiblement dans l'intervalle d'un jour), l'angle de déclinaison est le même pour tous les plans horaires.

Calculons EM : pour cela nous avons le triangle EMC$''$, dans lequel C$''$E $= a$ tang L$'$, en représentant par L$'$ l'angle que fait le style avec la ligne horaire et dont nous donnerons plus loin la valeur. Ce triangle fournit la proportion EM : C$''$E $= \sin \delta : \cos (L' - \delta)$. Donc, en représentant par d la distance cherchée,

$$d = a. \frac{\text{tang } L'. \sin \delta}{\cos (L' - \delta)} \qquad [2]$$

27. Quant à la valeur de tang L$'$, et, par suite, celle de $(L' - \delta)$, elle est donnée par le triangle AEC$''$ dans lequel tang $L' = \frac{EC''}{a}$. Mais, par construction, $EC'' = EC' = \sqrt{b^2 + r^2}$, ou mettant pour b et r leurs valeurs analytiques, $EC'' = a \frac{\text{tang } L}{\cos H}$. Et par conséquent,

$$\text{tang } L' = \frac{\text{tang } L}{\cos H} \qquad [3]$$

28. C'est avec les trois formules ci-dessus qu'on déterminera numériquement, au moyen des valeurs de H et de δ prises comme données, tous les points où les lignes diurnes qu'on veut tracer rencontrent les lignes horaires. Celles de ces lignes qu'on choisit ordinairement sont celles qui correspondent à l'entrée du soleil dans les douze signes du zodiaque. Elles se confondent deux à deux, parce que le soleil a la même déclinaison

lorsqu'il entre dans les signes également éloignés des solstices.

On remarquera que, dans l'équation [2], le dénominateur deviendra cos ($L'+\delta$) quand la déclinaison changera de signe, ou de boréale deviendra australe ; et que d changeant de signe en même temps que δ, les distances devront être portées en sens contraire sur les lignes horaires, c'est-à-dire au-delà de la ligne équinoxiale, quand les premières l'étaient en deçà. (Voyez la note 1re).

29. Avec ces formules on pourrait tracer la *courbe du temps moyen;* mais les lignes horaires correspondantes à l'équation journalière se rapprochant beaucoup de la méridienne, il en résulterait quelque confusion. Il est préférable de tracer la courbe au moyen des coordonnées rectangulaires, et voici comment on y parvient.

Coordonnées rectangulaires.

Il faut d'abord déterminer l'angle α que fait la ligne horaire avec la méridienne. Or,

$\tan \alpha = \frac{BE}{AB}$ et $BE = b \tan H$, $AB = \frac{b}{\sin L}$; donc

$$\tan \alpha = \tan H . \sin L. \qquad [4]$$

Faisons actuellement $AP = x$, $PM = y$, nous aurons $x = AM \cos \alpha$, $y = AM \sin \alpha$, et comme le triangle AMC″ donne $AM = a \frac{\cos \delta}{\cos(L' - \delta)}$ il vient, en représentant cette quantité par l,

$$x = l \cos \alpha \quad , \quad y = l \sin \alpha. \qquad [5]$$

30. Remarquons que la quantité l représente les longueurs de l'ombre du style sur les lignes horaires. C'est une valeur dont on peut avoir besoin, et, pour cette raison, nous enregistrons ici la formule qui donne ces longueurs :

$$l = a \frac{\cos \delta}{\cos (L' - \delta)} \qquad [6]$$

Et l'on remarquera encore ici que le dénominateur devient *cos* $(L' + \delta)$ quand la déclinaison est australe.

31. Il faut, dans l'application de ces formules, procéder par ordre, pour ne pas se tromper. On fera donc un tableau dans lequel on inscrira les valeurs de δ et celles de H, déduites de l'équation du temps pour les jours de chaque mois qu'on aura choisis ; ces données se trouvent dans les éphémérides. Puis, dans d'autres colonnes du même tableau, les valeurs de L' et de α que donneront les équations [3] et [4] ; celles de $(L' - \delta)$; et enfin les valeurs de x et de y calculées par les formules [5] et [6].

Nous ajouterons qu'il est expéditif de calculer toutes les quantités de la même espèce qui doivent entrer dans le tableau, et de ne passer à d'autres que lorsque la colonne est remplie. On suit facilement, de cette manière, la progression de l'élément dont on s'occupe ; on évite les erreurs, surtout celles qui proviennent des changements de signes, auxquels il faut avoir une grande attention ; la marche est ainsi plus prompte et plus sûre.

32. Pour donner une plus grande exactitude au tracé de la courbe, il convient d'en déterminer les *points singuliers*. On aura d'abord les quatre points où elle coupe la méridienne, en faisant, dans les formules, $H = o$, $\alpha = o$, $L' = L$; et pour δ on prendra les valeurs de la déclinaison correspondantes aux jours où l'équation du temps est égale à zéro.

Les points extrêmes, ou sommets de la courbe, seront donnés, très sensiblement, par les plus grandes valeurs des déclinaisons australe et boréale, lesquelles sont actuellement de 23°, 27′ ½.

Les plus grandes valeurs de l'équation du temps donneront les points où les lignes horaires sont tangentes à la courbe. Il y en a quatre ; leur tracé est fort utile pour donner une bonne direction aux branches de la courbe.

Exemple.

33. Prenons pour exemple un cadran dans un lieu où la latitude soit de 40° et dont le style ait $1^m,00$ de hauteur, c'est-à-dire où $L = 40$ et $h = 1000$ millimètres.

On aura d'abord pour bases de la construction, en mettant en nombre les formules du n° 24,

$$a = 1555{,}7 \quad , \quad b = 1305{,}4 \quad ;$$
$$q = 1191{,}8 \quad , \quad q' = 839{,}1.$$

La valeur de q donnera la position du centre sur la méridienne, et celle de q' le point de la même méridienne par lequel doit passer la ligne équinoxiale, laquelle lui est perpendiculaire et se trouve par conséquent déterminée.

Après cela, si l'on veut tracer les *lignes horaires*, on calculera les longueurs r par la formule [1]; et pour les *lignes diurnes* les valeurs de d, par la formule [2].

Mais la *courbe du temps moyen* exige le tableau suivant :

MOIS et JOURS.	ÉQUATION e	ANGLE HOR. H	DÉCLIN δ	ANGLE L′	ANGLE L′ − δ	ANGLE α	VALEURS DE x	y
	′ ″	° ′ ″	° ′	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	mm.	mm
1er janv.	3.56	0.59.00	— 23.01	40.0.10	63.01.10	.38.10	3155,9	+ 34,9
15 janv.	9.47	2.26.45	— 21.07	40.1.30	61.08.30	1.34.30	3005,7	+ 82,6
1er févr.	15,57	3.29.15	— 17.05	40.3.10	57.08.10	2.14.40	2738,3	+ 107,3
15 févr.	14.27	3.36.45	— 12.39	40.3.20	52.42.20	2.19.30	2503,2	+ 101,6
1er mars.	12.37	3.09.15	— 7.33	40.2.40	47 35.40	2.01.40	2285,5	+ 80,9
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

On aura soin de multiplier davantage les points près des sommets de la courbe, afin d'en mieux arrêter la forme.

34. Pour compléter la détermination de la courbe du temps moyen, dont le tracé exact est si important pour la régularisation des montres et horloges, il convient de tracer les tangentes aux quatre points des maxima de l'équation du temps. Or, ces tangentes passent par l'origine des coordonnées, comme les autres lignes horaires; leur équation est donc de la forme

$$y = x \text{ tang } \alpha,$$

et l'on particularise chacune de ces tangentes en mettant dans l'équation les plus grandes valeurs de α, inscrites dans la septième colonne du tableau.

Menant à une distance arbitraire une horizontale ou perpendiculaire à la méridienne, on aura un point de la tangente sur cette horizontale : que ce soit par exemple à la distance 3200 de l'origine, le point de section sur l'horizontale se trouvera à $3200 \times \textit{tang}\ \alpha$ de la méridienne. Et comme d'ailleurs on a le point de contact par ses coordonnées, et aussi le point de convergence par lequel la tangente doit passer, cette tangente est suffisamment déterminée. Mais si le point de convergence est trop éloigné ou obstrué par l'implantation du style, on y supplée par une autre horizontale menée à quelque distance, par exemple à 500 millimètres, et l'on obtient, comme ci-dessus, d'autres points par lesquels les tangentes doivent passer, et qui sont à la distance $500 \times \textit{tang}\ \alpha$ de la méridienne.

Ainsi, trois points sur chaque droite en assurent la parfaite direction.

On a tracé de la sorte la figure 9ᵉ, qui donne la courbe du temps moyen, ses tangentes et les lignes horaires pour XI $^1/_2$ et XII $^1/_2$ heures, avec les données $L = 40^\circ$, $h = 700^{mm}$. Les courbes extrêmes tangentes aux deux sommets, sont les portions des lignes diurnes solsticiales ; elles limitent la courbe du temps moyen.

ARTICLE SECOND.

CALCULS D'UN CADRAN VERTICAL.

35. Il y a deux cas à examiner : celui où le plan vertical du cadran est exactement orienté Est et Ouest, et se confond par conséquent avec le premier vertical. Alors le style est contenu dans le plan méridien, et sa projection sur le cadran, ou la *soustylaire*, se confond avec la méridienne, qui est nécessairement verticale, puisqu'elle résulte de l'intersection du plan méridien avec le plan du cadran (nº 4), lesquels sont tous deux verticaux.

36. Le second cas est celui où le plan vertical du cadran fait un angle quelconque avec la ligne Est et Ouest Et cet angle, mesuré du côté de l'ouest, peut s'ouvrir en arrière ou en avant du

premier vertical. Si c'est en arrière, le cadran s'approche du nord, et sa perpendiculaire (antérieure) de l'ouest ; on dit qu'il dévie ou *décline à l'ouest*. Si c'est en avant, le plan du cadran s'approche du sud par sa gauche, et sa perpendiculaire de l'est ; on dit qu'il dévie ou *décline à l'est*. Dans ces deux positions le cadran est oblique.

§ 1er. *Cadran vertical direct.*

37. Nous traiterons d'abord ce cas, qui est le plus simple, et qu'on ramène à celui du cadran horizontal au moyen de quelques transformations, comme on va le voir.

Soit AB (fig. 2e) la méridienne du cadran, AC le style rabattu sur le plan du cadran (c'est maintenant son pied A qui est dirigé vers le nord); QC sera la *hauteur* du style, c'est-à-dire la distance de son extrémité à la méridienne ; BC est le *rayon équatorial*, dont l'intersection avec AB donne le point B par lequel la *ligne équinoxiale* doit passer ; d'ailleurs cette ligne est toujours perpendiculaire à la *soustylaire*, qui se confond avec AB (no 9); elle est donc parfaitement déterminée.

38. Maintenant, si nous rabattons le plan équatorial sur le plan du cadran, en le faisant tourner sur sa trace EF, le point C tombera en C′, et BC′ égale BC; en sorte que si l'on mène la ligne C′E, faisant avec C′B un angle H égal à l'angle horaire

dont on veut s'occuper, la ligne AE sera la *ligne horaire* correspondante. Et rabattant le plan horaire en AC″E, de telle sorte que AC″ soit égale à AC, et que l'angle C″ soit droit, la ligne C″M, menée sous l'inclinaison δ, indiquant la déclinaison australe du jour, on aura le point M de la *courbe diurne* DMN.

39. Les constructions sont donc absolument les mêmes que pour le cadran horizontal, excepté que le style fait avec la méridienne un angle égal, non à la latitude du lieu, mais à son complément. En sorte que les formules seront les mêmes que celles précédemment trouvées, en changeant dans celles-ci L en ($90°-$L), et δ en $-\delta$, parce que la déclinaison boréale, toujours positive, joue ici le même rôle que la déclinaison australe dans l'autre cadran. Ainsi, avec les mêmes dénominations, on aura :

$$r = b \operatorname{tang} H \qquad \operatorname{tang} L' = \frac{\cot L}{\cos H}$$

$$d = a \operatorname{tang} L' \frac{\sin \delta}{\cos (L' + \delta)} \qquad \operatorname{tang} \alpha = \operatorname{tang} H \cos L$$

$$l = a \frac{\cos \delta}{\cos (L' + \delta)}$$

$$x = l \cos \alpha \qquad y = l \sin \alpha$$

40. Avec ces formules on pourra tracer, savoir :

1° Les lignes horaires AE au moyen des valeurs de r.

2° Les lignes diurnes **DMN** au moyen des valeurs de d.

3° La courbe du temps moyen, par les valeurs de x et de y dépendantes de celle de l, ou des longueurs d'ombre.

41. Pour déterminer celles-ci, on fera le même tableau que pour le cadran horizontal, et on regardera comme positives les valeurs de y qui correspondent à l'avance du temps moyen sur le temps vrai, et qui sont par conséquent à la gauche de la méridienne; et comme négatives celles qui sont de l'autre côté et qui correspondent au retard du temps moyen sur le temps vrai. Pour celles-ci, la valeur de l'équation e, de laquelle tout le reste dépend, s'obtient par soustraction dans les éphémérides: on y trouve par exemple qu'au 1er mai le temps moyen au midi vrai est 11h 56′ 57″; cela signifie que le temps moyen retarde sur le temps vrai de 3′ 3″. C'est cette valeur, complément de la précédente, qui est la valeur de e à porter avec le signe $-$ dans la seconde colonne du tableau. La valeur correspondante de y sera également négative. Le signe de y est toujours le même que celui de e, en sorte qu'on ne peut point faire d'erreur à cet égard.

42. D'ailleurs le cadran étant symétrique par rapport à la méridienne, en ce qui concerne les lignes horaires et les courbes diurnes, on se con-

tentera de calculer les valeurs de r et de d pour la partie gauche du cadran ; elles seront les mêmes pour la partie droite. (Voyez pour un procédé d'approximation la note 2e.)

La figure 10e donne la courbe du temps moyen avec les lignes horaires de XI ½ et XII ½ heures, ainsi que les portions des courbes diurnes solsticiales, d'un cadran vertical direct, construit avec les mêmes données et à la même échelle que le cadran horizontal qui est à côté. Les deux figures, ainsi rapprochées, montrent l'influence de la position du plan sur la forme de la *courbe méridienne*.

§ 2. *Cadran vertical oblique.*

43. Soit XY (fig. 3e) la trace horizontale du cadran, OS celle du méridien ; la projection horizontale du style se confondra avec cette ligne, et l'intersection AO sera la *méridienne* du cadran, toujours verticale.

La perpendiculaire OR à OS sera la trace du premier vertical, et l'angle ROX, que nous appellerons μ, sera la *déviation* du cadran à l'Ouest.

Le rabattement ACB étant opéré, la ligne AC donne la longueur a du style, et sa perpendiculaire BC le rayon équatorial b.

La ligne CQ donne la distance du style à la méridienne, que nous représenterons toujours par h, et qui est une des données du problème. Le point S, sur le plan horizontal, étant à la distance OS, égale à QC, de la verticale AO, donne la projection horizontale du style ; et, par conséquent, S′ en est la projection verticale. En sorte que AS′ est la *soustylaire* (n° 9).

44. Or, la ligne équinoxiale, devant toujours être perpendiculaire à cette droite et passer par B, est déterminée. Dans les constructions en grand, il convient, pour la fixer, de construire sur la perpendiculaire à AB un triangle égal à AQS, dont l'hypothénuse donnera la direction de BF. Les côtés de ce triangle, résultant des données du problème, sont déterminés numériquement avec exactitude. S'ils sont trop grands pour être employés commodément, on en prend la moitié et l'on construit un triangle semblable. La position de l'équinoxiale n'est pas moins assurée, surtout si l'on a eu soin de faire la même opération de l'autre côté de la méridienne, en retournant le triangle, pour avoir la direction de BE, laquelle doit être dans le prolongement exact de BF.

45. Occupons-nous maintenant des *lignes horaires;* et, pour cela, faisons tourner le plan de l'équateur autour de sa trace EF pour le rabattre sur le cadran ; le point (S, S′) tombera en S″ sur la ligne AS′ perpendiculaire à la trace [1], et la li-

[1] On trouve la distance de S″ à EF par la petite construc-

gne S″B sera le rayon de midi. Soit donc S″E une ligne faisant avec S″B un angle horaire H, le point E de la ligne équinoxiale, par lequel la ligne horaire correspondante doit passer, sera déterminé. Cherchons la valeur numérique de BE.

Pour cela, menons l'horizontale EK ; elle fera avec EB un angle v égal à l'angle S′AB, qui se calcule, une fois pour toutes, par la formule

$$\tang v = \frac{QS'}{AQ},$$

données du problème ; ou, en faisant ST $= h'$ et OT $= h''$, pour indiquer que ce sont les deux projections de SO $= h$, et se rappelant que la ligne AQ a été représentée par q, quantité également connue, nous aurons

$$\tang v = \frac{h''}{q}.$$

D'un autre côté, si nous représentons par ω l'angle variable OSX, nous aurons $\tang \omega = \frac{OR}{OS}$. Mais OS $= h$, donnée du problème, et OR n'est autre chose que r dans le cadran direct, ou b tang H, donc :

$$\tang \omega = \frac{b}{h} \tang H.$$

tion suivante : On abaisse de S′ (fig. 4e) la perpendiculaire indéfinie S′D sur la droite ; on prend sur cette droite DI égale à ST, et l'hypothénuse S′I est la distance cherchée qu'on porte en DS″. C'est un des problèmes élémentaires de la géométrie descriptive.

46. Maintenant, si nous désignons encore par r la distance BE cherchée, nous aurons $BK = r \sin v$, et l'on a, d'un autre côté, $BK = EK \tang v$. Donc en égalant, $r = \frac{EK}{\cos V}$. Or, $EK = XT - OT$, ou $EK = h' \tang (\omega + \mu) - h''$; donc :

$$r = h' \frac{\tang (\omega + \mu) - h''}{\cos v} \qquad [a]$$

Cette équation, avec les valeurs des angles v et ω, déduites des relations précédentes, donne tout ce qu'il faut pour fixer la position des lignes horaires, telles que AE [1].

47. Passons maintenant à la détermination de d ou de la portion EM de la ligne horaire comprise entre la ligne équinoxiale et la courbe diurne, relative à une déclinaison δ.

Nous regarderons d'abord comme connu l'angle α que la ligne horaire fait avec la méridienne, et la longueur $AE = f$ de cette ligne, car ces quantités peuvent se déterminer.

[1] La quantité $h' \tang (\omega + \mu) - h''$ pourrait subir une transformation qui la rendrait plus propre au calcul logarithmique. Pour cela, il faudrait y faire $h' = h \sin \mu$, et changer la différence de deux tangentes en un produit. On aurait alors $r = h \frac{\cos \mu}{\cos v} \left(\frac{\sin \omega}{\cos (\omega + \mu) \cos \mu} \right)$. Mais il ne nous a pas paru qu'il y eût un avantage réel à cette transformation, et nous avons laissé l'expression sous sa première forme.

Le plan horaire étant rabattu en AEC$''$, comme dans les cas précédents, on aura $AC'' = a$, et l'angle C$''$ droit. Désignant donc toujours par L$'$ l'angle en A, on aura

$$\cos L' = \frac{a}{f} \quad \text{et} \quad EC'' = f \sin L'.$$

Puis le triangle AC$''$M donnera $MC'' = a \dfrac{\sin L'}{\cos(L' - \delta)}$.

On connaît donc dans le triangle MC$''$E deux côtés et les angles ; ainsi on peut établir la proportion $EM : MC'' = \sin \delta : \cos L'$, d'où $EM = MC'' \dfrac{\sin \delta}{\cos L'}$, et, par la substitution, $d = a \tang L'$ $\dfrac{\sin \delta}{\cos(L' - \delta)}$ qu'il faut changer en

$$d = a \tang L' \frac{\sin \delta}{\cos(L' + \delta)} \qquad [b]$$

parce que, d'après les conventions, la déclinaison australe est négative, tandis que nous l'avons prise comme positive dans ce qui précède. Alors, en donnant à δ le signe convenable, les valeurs de d seront positives au-dessous de l'équinoxiale, et négatives en dessus, comme cela doit être, puisqu'elles se mesurent en sens inverse.

48. L'angle L$'$ étant donné par l'équation :

$$\cos L' = \frac{a}{f},$$

il faut voir quelle est la valeur de f. Or, dans le triangle ABE, on a :

$$f : r = \sin(90^\circ + v) : \sin \alpha,$$

d'où $f = r \frac{\cos v}{\sin \alpha}$, valeur qui devient $\frac{r}{\sin \alpha}$ pour le cadran direct, comme cela doit être. Donc

$$\cos L' = \frac{a \sin \alpha}{r \cos v} \qquad [c]$$

49. Quant à l'angle α, duquel dépend cette valeur, il est donné par le triangle rectangle AEK, dans lequel $\tang \alpha = \frac{EK}{AK}$, ou, en faisant attention que $AB = (q + q')$

$$\tang \alpha = \frac{r \cos v}{(q + q') + r \sin v} \qquad [d]$$

la quantité $(q + q')$ résultant des données et étant calculée une fois pour toutes.

Coordonnées rectangulaires.

50. Il nous reste à trouver les coordonnées x et y d'un point quelconque M, correspondant à un angle horaire H donné, et à une déclinaison δ également donnée. Ces coordonnées sont AP et MP ; en sorte qu'en représentant, comme précédemment, par l la longueur d'ombre AM, on a :

$$x = l \cos \alpha \quad , \quad y = l \sin \alpha \qquad [e]$$

la valeur de l étant toujours (n° 39)

$$l = a \frac{\cos \delta}{\cos (L' + \delta)} \qquad [f]$$

51. *Remarque.* Dans l'application de ces formules il faut faire attention non seulement au signe de δ, qui est positif pour les déclinaisons boréales et négatif pour les déclinaisons australes ; mais également à ceux de r et de d, ainsi que des tangentes de ω et de α. En effet, r change de signe en passant de la gauche à la droite de la méridienne, ainsi que les angles ω et α ; d change de signe, comme il a déjà été dit, suivant que le point dont il mesure la distance à l'équinoxiale est en dessous ou en dessus de cette ligne, positif en dessous, parce que la ligne se mesure dans le sens direct de AE, négative en dessus, parce qu'elle est prise en remontant, ou en sens inverse. Quant à l'ordonnée y, elle a toujours le même signe que l'équation du temps e; elle est positive à gauche de la méridienne, négative à droite.

52. Ce qui, au reste, confirme l'exactitude de ces formules, c'est que si on y fait $\mu = o$, on retrouve les valeurs de r, tang α, tang L′ relatives au cadran vertical direct, et, par conséquent, aussi celles de d, x et y. (Voyez la note 3[e].)

Applications.

53. Les données d'un cadran vertical oblique déviant à l'ouest étant :

Latitude $=$ L, déviation $= \mu$, hauteur du style $= h$, on calculera d'abord, et une fois pour toutes, les quantités

$$a = \frac{h}{\cos L}, \quad b = \frac{h}{\sin L}, \quad q = h \operatorname{tang} L, \quad q' = h \cot L.$$

$$\operatorname{tang} v = \frac{\sin \mu}{\operatorname{tang} L}, \quad h' = h \cos \mu \quad , \quad h'' = h \sin \mu.$$

Puis on calculera les quantités variables dans l'ordre suivant :

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{b}{h} \operatorname{tang} H \qquad \text{d'où } \omega$$

$$r = \frac{h' \operatorname{tang}(\omega + \mu) - h''}{\cos v}$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{r \cos v}{(q + q') + r \sin v} \qquad \text{d'où } \alpha$$

$$\cos L' = \frac{a \sin \alpha}{r \cos v} \qquad \text{d'où } L'$$

$$l = a \frac{\cos \delta}{\cos (L' + \delta)}$$

$$x = l \cos \alpha \qquad \text{et} \qquad y = l \sin \alpha$$

avec quoi on tracera par points la courbe du temps moyen. Et il a déjà été dit que, pour éviter les erreurs, il faut préparer un tableau dans lequel on inscrit à mesure les valeurs trouvées, en ayant soin de prendre la suite des logarithmes d'un même angle pour tous les points dont on a à s'occuper. Cela facilite et accélère l'opération, en même temps que les causes d'erreur sont écartées. Voici la forme de ce tableau :

DATES.	c	H	δ	ω	$\omega+\mu$	r	α	L′	L′+δ	VALEURS DE x	VALEURS DE y

54. Quand on tracera la courbe, on aura soin de multiplier les points vers ses sommets. Il faudra, par exemple, les déterminer de cinq en cinq jours, s'ils l'ont été de quinze en quinze pour le reste de la courbe, ce qui est ordinairement suffisant. Il faut encore faire attention, pour donner à la courbe toute l'exactitude possible, que son sommet S (fig. 5ᵉ) est un peu au-dessous du point M, qui correspond au solstice donné par la plus grande déclinaison ; parce que la courbe solsticiale XY, au lieu de tomber perpendiculairement sur la méridienne RT, fait avec elle un angle d'autant plus prononcé que l'inclinaison du cadran est plus forte. Le point de contact M, donné par la plus grande déclinaison, est au-dessus du sommet S. En sorte que, dans les cadrans à grandes dimensions, il y a une distance très-appréciable entre les horizontales MP et SQ, du point de tangence et du sommet ; circonstance dont il faut tenir compte. Dans le cadran direct, cette distance se réduit à si peu de chose, que l'abscisse du point de tangence se confond sensiblement avec celle du sommet.

55. Si l'on voulait, outre la courbe du temps

moyen, tracer sur le cadran quelques *lignes horaires* et les portions des *courbes diurnes* qui les coupent, il faudrait calculer, pour les valeurs de H et de δ correspondantes et données par les éphémérides, celles de

$$r = \frac{h' \operatorname{tang}(\omega + \mu) - h''}{\cos v} \quad \text{et} \quad d = a \operatorname{tang} L' \frac{\sin \delta}{\cos (L' + \delta)}$$

Les premières valeurs donneraient, sur l'équinoxiale, les points où les lignes horaires doivent passer; et, si le point de convergence était trop éloigné, ou mal situé pour en faire usage dans le tracé, on recouperait ces lignes par une horizontale $x = m$; en sorte qu'on aurait sur cette horizontale, et pour chaque ligne horaire, un point à la distance $m \operatorname{tang} \alpha$ de la méridienne, ainsi qu'on l'a fait pour le cadran horizontal (nº 34). Et, pour plus d'exactitude encore, on mènerait une seconde horizontale, à la distance m', sur laquelle on aurait aussi, pour chaque ligne horaire, une distance $m' \operatorname{tang} \alpha$ à la méridienne. On tracerait donc ces lignes avec une grande exactitude, puisqu'on aurait trois points pour chacune d'elles. C'est ainsi qu'a été tracée la figure 11ᵉ, qui représente un cadran vertical déclinant à l'Ouest.

Il n'y aurait plus qu'à porter sur les lignes horaires les valeurs correspondantes de d, pour avoir les points par lesquels les *courbes diurnes* devront passer. On se borne ordinairement, ainsi qu'il a déjà été dit, à celles qui marquent l'entrée du soleil dans les signes. Les valeurs positives de d correspondent aux courbes qui sont au-dessous de l'équinoxiale, les valeurs négatives à celles qui sont au-dessus.

Le cadran n'étant plus symétrique par rapport à la méridienne, il est nécessaire de calculer les valeurs de r et de d, aussi bien pour la partie droite que pour la partie gauche du cadran.

Cadran déclinant à l'Est.

56. Dans tout ce qui précède, les calculs se rapportent à un cadran qui dévie ou *décline* à l'Ouest. S'il déclinait à l'Est, on se servirait des mêmes formules en y changeant les signes des angles μ et v, parce que ces angles, qui dans le premier cas étaient à la droite de la méridienne, passent à la gauche dans le second. Les autres quantités conservent leurs signes. On a donc, les données étant les mêmes,

$$\text{tang}\,\omega = \frac{b}{h}\,\text{tang H}$$

$$r = \frac{h'\,\text{tang}\,(\omega - \mu) - h''}{\cos v}$$

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{r \cos v}{(q + q') - r \sin v}$$

$$\cos L' = \frac{a \sin \alpha}{r \cos v}$$

$$l = a \frac{\cos \delta}{\cos (L' + \delta)}$$

$$x = l \cos \alpha \quad \text{et} \quad y = l \sin \alpha$$

La distance des points de section des courbes diurnes par les lignes horaires à l'équinoxiale, est encore

$$d = a \operatorname{tang} L' \cdot \frac{\sin \delta}{\cos (L' + \delta)}$$

Cette valeur a toujours le même signe que δ, c'est-à-dire qu'elle est positive pour les déclinaisons boréales, négative pour les déclinaisons australes.

Quant aux autres quantités H, ω, α, r, y, elles ont le même signe que l'équation du temps e.

ARTICLE TROISIÈME.

CALCUL D'UN CADRAN OBLIQUE ET EN TALUS.

57. Ce cas est sans doute rare, mais il peut se présenter ; voyons donc encore, et pour compléter le sujet, comment on le résoudra.

On imaginera d'abord par le pied XY du talus (fig. 6ᵉ) un plan vertical sur lequel seraient tracées, par les procédés de l'article précédent, les principales lignes d'un cadran vertical oblique, où par conséquent AO serait la méridienne, AX une ligne horaire quelconque, Q le pied du style dans le plan méridien, etc. Ce sera au moyen de ces lignes, supposées connues, qu'on trouvera les lignes correspondantes sur le cadran *oblique et incliné*, de même déviation μ que le cadran vertical oblique.

58. Le style ([1]) se projette horizontalement en S, et l'on a toujours pour données $SO = h$, la latitude L et la déviation μ. Une nouvelle donnée, nécessaire dans le cas actuel, est celle de l'angle ξ que fait le plan du cadran avec le plan vertical, angle représenté par VYZ dans la projection latérale de la figure.

Méridienne et lignes horaires.

59. La *méridienne* n'est plus une ligne verticale, parce qu'étant toujours donnée par l'intersection du plan méridien avec le cadran qui est incliné, elle ne peut être elle-même qu'une ligne inclinée; et voici comment on la trouve.

On coupe tout le système par un plan horizontal à la hauteur TS′ du style. Il donne deux horizon-

([1]) Nous disons le *style* pour l'extrémité du style, ce point étant le seul nécessaire à considérer, et devant être remplacé par un trou percé dans une plaque circulaire coïncidant avec le plan de l'équateur.

tales, l'une dans le plan vertical, l'autre dans le plan incliné, séparées l'une de l'autre par l'intervalle VR. Elles se projettent donc en OX et *pn*, si O*p* est égale à VR. Par conséquent, le point *m*, que donne le rayon SO, est dans le plan incliné; et, comme il est en même temps dans le plan méridien, il appartient à leur intersection commune, c'est-à-dire à la méridienne. Mais il doit se trouver à la hauteur de l'horizontale $S'n'$, donc il est en m'. D'ailleurs, le point O, situé sur l'intersection XY des deux cadrans, appartient aussi évidemment à la méridienne. Cette ligne est donc, en projection, la ligne OR qui passe par m' et par O. Il n'y a donc qu'à déterminer la valeur numérique de Qm' pour fixer exactement la position de la projection verticale OR de la méridienne.

60. Or, si nous représentons par i l'intervalle VR, et par k la hauteur RY, nous aurons

$$i = k \operatorname{tang} \xi \qquad [1]$$

et

$$mp = i \operatorname{tang} \mu \quad \text{ou} \quad m'Q = K \operatorname{tang} \xi \,.\, \operatorname{tang} \mu$$

On a donc très-exactement la projection de la méridienne oblique sur le plan vertical. Et si l'on voulait l'angle o que cette projection fait avec la verticale, le triangle $m'QO$, dans lequel on connaît les deux côtés $m'Q$ et QO, donnerait

$$\operatorname{tang} o = \operatorname{tang} \mu \,.\, \operatorname{tang} \xi \qquad [2]$$

61. La *ligne horaire* AX donne de même Xn' dans la projection. Or, la distance $m'n'$ à laquelle la ligne horaire passe de la méridienne sur l'horizontale du style, se détermine aussi numériquement ; car on a, par le triangle mnS, la proportion : mn : OI $=$ (ST $+$ Op) : ST ; ou, en représentant par c la distance connue QI$'$ de la ligne horaire à la méridienne dans le cadran vertical, et par c' la distance correspondante $m'n'$ sur le cadran incliné, la proportion donne

$$c' = c\left(\frac{h'+i}{h'}\right) \qquad [3]$$

en se rappelant que h' est le côté ST du triangle STO, dans lequel l'hypothénuse SO représente la quantité donnée h, distance du style à la méridienne du cadran vertical. L'autre projection de la même ligne h est OT ; nous la représentons par h''.

62. Les lignes horaires, ainsi que la méridienne, sont donc déterminées en projection. Pour les avoir en rabattement, c'est-à-dire sur le plan même du cadran, il faut remarquer que si l'on fait tourner ce cadran autour de l'horizontale XY pour le ramener dans le plan vertical, le point Q tombera en Q$'$, la distance OQ$'$ étant égale à YV ou $\frac{k}{\cos\xi}$. Ainsi l'horizontale du style est fixée sur le nouveau cadran.

Quant aux distances prises sur cette horizontale, elles ne changent pas par le rabattement ; elles restent égales à Qm', Qn', etc. Et comme les points O, X, etc., n'ont pas bougé, les lignes horaires qui passent par ces points sont déterminées.

L'angle o devient un peu plus petit dans le rabattement. Dans les cas ordinaires, l'angle ξ est très-aigu ; alors la différence entre l'angle o et son rabattement est insensible dans les résultats du calcul, et l'on peut prendre l'un pour l'autre [1].

Système de coordonnées.

63. Au lieu de tracer, comme dans les cas précédents, la ligne équinoxiale et les longueurs r et d par des constructions particulières, lesquelles seraient nécessairement compliquées, dans le cas actuel, nous chercherons les coordonnées d'un point quelconque, parce qu'elles pourront servir aussi bien pour ces lignes que pour la *courbe du temps moyen*, où elles sont indispensables.

On simplifiera les recherches en transportant l'origine des coordonnées au point O, et en pre-

(1) Cependant, si l'on voulait avoir égard à cette différence, on trouvera qu'en représentant par O′ l'angle O rabattu, on aura $\tang O' = \tang \mu \sin \xi$. Cet angle est plus petit que son correspondant O dans le rapport du sinus à la tangente de l'angle d'inclinaison ξ du cadran; celui-ci est donné par $\tang O = \tang \mu \tang \xi$.

nant pour nouveaux axes les lignes OR et OX dans le rabattement [1]. Alors le nouveau cadran pourra être considéré comme la perspective de l'ancien.

64. Représentant par x et y les coordonnées connues d'un point M du cadran vertical, rapportées à l'origine O, nous aurons $OP = x$, $PM = y$ (fig. 7e). Puis M′ étant la perspective du point M, et D celle de P, on aura, en appelant x' et y' les coordonnées de M relatives aux nouveaux axes ; on aura, dis-je, OD égale à la projection de x', et M′D égale à la longueur réelle de y'.

Il faut trouver les valeurs de x' et de y' en fonction de x et de y.

Nous chercherons d'abord l'angle ε que fait avec la verticale la projection S′D du rayon relatif au point P. Or, $PQ = k - x$, et $QS' = h''$; donc

$$\text{tang}\, \varepsilon = \frac{h''}{k-x} \qquad [4]$$

quantité qui varie avec x et qui devient négative, quand $x > k$, c'est-à-dire lorsque le point P est au-dessus de l'horizontale du style ; ce qui indique que l'angle ε est alors obtus.

65. Maintenant, dans le triangle DPO, nous connaissons deux angles et un côté; on a donc

[1] La transformation se fait simplement en retranchant de la longueur connue AO les valeurs primitives de x ; celles de y ne changent pas.

$OD = x \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + o)}$; mais par le triangle OP′D on a aussi $OD = \frac{OP'}{\cos o}$. Et si l'on se reporte à la projection latérale, on verra par une projection de projection, que $OP' = x' . \cos o' . \cos \xi$. Donc, en égalant $x' = \frac{x}{\cos \xi} . \frac{\cos o}{\cos o'} . \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + o)}$, c'est la valeur exacte ; mais, ainsi qu'on l'a fait observer, les angles o et o' diffèrent très-peu dans les cas ordinaires, en sorte que le facteur $\frac{\cos o}{\cos o'}$ diffère très-peu de l'unité, et que l'expression se simplifie ; l'on a sensiblement

$$x' = \frac{x}{\cos \xi} . \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + o)} \qquad [5]$$

tant que l'angle ξ n'est pas plus grand que 10°, ni la déviation μ plus grande que 30°; on peut se contenter de cette formule, qui donne, à moins d'un millimètre pour deux mètres, la valeur de x' dans ce cas extrême.

66. Maintenant on a, pour déterminer y', la proportion M′D : MP = P′Q : PQ; ou, en représentant par z la quantité OP′ trouvée plus haut, $y' : y = (k - z) : (k - x)$, d'où

$$y' = y\left(\frac{k - z}{k - x}\right). \qquad [6]$$

Pour les points situés sur l'horizontale du style, cette formule est en défaut, parce qu'alors z et x sont égaux à k; mais nous avons vu (n° 61) qu'on a, pour ces points particuliers, $y' = y\left(\frac{h'+i}{h'}\right)$. Ce sont les valeurs des distances des lignes horaires à la méridienne. Ainsi l'indétermination cesse.

On a donc, en joignant l'équation

$$z = x'.\cos o'.\cos \xi \qquad [7]$$

aux précédentes, tout ce qu'il faut pour tracer un cadran oblique et incliné, après avoir, au préalable, calculé avec les mêmes données un cadran vertical oblique, ayant avec l'autre une même trace horizontale, sur laquelle se trouve l'origine des coordonnées. C'est ainsi qu'a été tracée la figure 12e en regard du cadran vertical oblique (fig. 11e), pour montrer la déformation que la perspective lui fait subir. (Voyez la note 4e.)

Position du style.

67. Il nous reste encore à trouver la *projection* du style sur le cadran, afin d'en assurer la position. Ayons pour cela recours à la projection latérale (fig. 6), où la perpendiculaire abaissée de l'extrémité du style sur le cadran est représentée par S″U. Dans cette figure, VS″ $=(i+h')$; donc VU $=(i+h')\sin\xi$; et comme QS′ $=h''$ ne change

pas en rabattement, il s'ensuit qu'on a le pied de la perpendiculaire, ou projection du style sur le cadran, en portant h'' sur l'horizontale du style, et une longueur $(i+h')\sin\xi$, directement au-dessous.

On a de plus, pour la longueur de la perpendiculaire S″U, qui mesure la distance du style au plan incliné du cadran, $S''U = (i+h')\cos\xi$. C'est tout ce qu'il faut.

Cadran incliné direct.

68. Si le cadran incliné était *direct*, au lieu de dévier, on aurait $\mu = o$, et la méridienne serait perpendiculaire à l'horizontale, comme dans le cadran vertical. Les formules se simplifieraient et deviendraient alors :

$$\text{tang}\,\varepsilon = \frac{h'}{k-x}$$

$$x' = x\,\frac{\sin\varepsilon}{\sin(\varepsilon+\xi)}$$

$$z = x'\cos\xi$$

$$y' = y\left(\frac{k-z}{k-x}\right).$$

On y arrive par la projection latérale ; et, dans cette projection, ε est l'angle que fait le rayon solaire avec la verticale.

Le point de projection du style se trouve au-dessous de l'horizontale dont il a été question jusqu'à présent, et sur la méridienne, à une distance qui est toujours $(i+h')\sin\xi$. Tout est donc déterminé dans ce cadran, aussi bien que dans l'autre.

69. On peut encore calculer directement ce cadran, en se rappelant ce qui a été dit dans les préliminaires (n° 5), qu'un cadran établi dans une localité peut servir pour une autre, en la supposant ramenée sous le même méridien, pourvu qu'on l'installe parallèlement à sa position primitive. Si donc on calcule un cadran *vertical direct* pour une latitude égale à celle du lieu augmentée de l'angle d'inclinaison, c'est-à-dire pour une latitude $(L+\xi)$, ce sera notre cadran *incliné direct*, pourvu qu'on ait pris pour h la quantité $(h'+i)\cos\xi$, qui est la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'extrémité du style sur le plan du cadran (n° 67), et, dans le cas actuel, $h'=h$.

Ainsi, en substituant $(L+\xi)$ et $(h+i)\cos\xi$ à L et à h dans les formules de l'article 2 relatives au cadran vertical direct, on aura celles qui conviennent au cadran incliné également direct ; et il ne sera plus nécessaire de passer par aucun intermédiaire.

COMPLÉMENT.

70. Pour donner une idée plus complète des *courbes diurnes*, nous avons figuré ces courbes dans une figure supplémentaire, faite à l'échelle du $^1/_{15}{}^e$, et représentant un cadran vertical déclinant à l'ouest (n° 36), construit au moyen des formules de l'article 2, avec les données suivantes :

Latitude $= 46°$, Déviation $= 30°$, Hauteur $= 0,^m70$.

Les lignes horaires y sont données de onze heures du matin à quatre heures de l'après-midi, avec les demi-heures indiquées seulement sur la ligne équinoxiale.

Les courbes diurnes sont celles qui correspondent à l'entrée du soleil dans les douze signes ; elles se confondent deux à deux, excepté celles des deux solstices, et elles correspondent aux latitudes suivantes, données en compte rond :

Solstice d'été. Ecrevisse.	Déclin.	bor.	+	23°. 28′.
Gémeaux et Lion.	»	»	+	20. 11.
Vierge et Taureau.	»	»	+	11. 30.
Equinoxe. Bélier et Balance.				0. 0.
Poissons et Scorpion.	Déclin.	austr.	—	11. 30.
Verseau et Sagittaire.	»	»	—	20. 11.
Solstice d'hiver. Capricorne.	»	»	—	23. 28.

71. Ces courbes sont, comme il a été dit dans le texte, des branches d'hyperboles (n° 8). Leurs sommets se trouvent tous sur la soustylaire AB, parce que, si on projette l'axe d'un cône droit à base circulaire sur le plan qui le coupe, les sommets de la section conique qui en résulte, quelle qu'elle soit, se trouvent sur cette projection. Ici, c'est la soustylaire qui est la projection de l'axe du cône formé par le rayon solaire dans son mouvement journalier ; donc la courbe qui résulte de la section de ce cône avec le plan du cadran, c'est-à-dire l'hyperbole ou courbe diurne, a son sommet sur cette droite : considération qui peut servir à donner plus de précision au tracé des *courbes diurnes*.

72. On obtient analytiquement les distances des sommets au centre du cadran par la longueur d'ombre, qui est, sur la soustylaire :

$$l = a\,\frac{\cos\delta}{\cos\,(L'' + \delta)}.$$

L'angle L″ étant donné par la formule

$$\operatorname{tang} L'' = \frac{h'}{h''}\,\sin v$$

qui se réfère au n° 45 pour la signification des quantités h', h'', v, qui entrent dans cette formule.

La valeur de l ci-dessus se trouve en faisant tourner autour de la soustylaire le plan projetant de l'axe, pour le rabattre sur le plan du cadran. Dans ce rabattement, l'angle L″ est celui que fait l'axe du cadran avec la soustylaire ; il joue le même rôle que l'angle L′ dans le rabattement du plan horaire (n° 47) ; et la valeur de l s'obtient par les mêmes procédés.

73. Le centre du cadran pouvant être très-éloigné, on pourra, en retranchant des valeurs ci-dessus la soustylaire, ne compter les distances qu'à partir de la projection du style sur le cadran ; elles seront alors, en les représentant par l' :

$$l' = a \frac{\cos \delta}{\cos (L'' + \delta)} - \frac{h''}{\sin v}$$

Le second terme est constant, et ne se calcule qu'une fois.

Rappelons encore que la déclinaison δ est positive au nord de l'équateur, et négative au sud.

74. On peut tracer les courbes diurnes au moyen d'un procédé purement mécanique, indiqué par Francœur dans son Uranographie (n° 319). Voici en quoi il consiste : On prépare un châssis rectangulaire, qu'on recouvre d'une planche légère ou d'un carton. Un des côtés du châssis doit coïncider avec l'axe du cadran. On élève sur le milieu de ce côté une perpendiculaire pour représenter le rayon équatorial. A droite et à gauche,

à partir du même point, on trace des lignes faisant avec la perpendiculaire des angles égaux à ceux qui sont enregistrés au numéro 70, et qui correspondent aux déclinaisons du soleil quand il entre dans les signes.

Après avoir fixé une tige sur le cadran, selon son axe, on suspend le châssis à cette tige au moyen de deux charnières, de telle sorte que le point de concours des lignes qui y sont tracées coïncide avec l'extrémité du style. Faisant alors tourner le châssis autour de l'axe (prolongé pour plus de sûreté), il prendra les différentes positions du plan horaire. Si, dans chaque position, on tend un fil de soie le long de la ligne qui marque la déclinaison du jour, ce fil, représentant le rayon solaire, déterminera sur le cadran un point de la courbe diurne. Et, en multipliant ces points, on parviendra à tracer la courbe d'une manière plus ou moins satisfaisante, suivant le degré d'attention et d'exactitude qu'on aura mis dans l'opération.

75. Ce procédé aurait l'avantage d'être applicable à toute espèce de cadran, même à des cadrans tracés sur des surfaces courbes ; mais il est d'une application difficile, parce qu'il faut fixer la broche qui représente l'axe d'une manière assez solide pour que les mouvements du châssis ne la dérangent pas ; puis, bien poser le châssis sur la broche, en ayant égard à son épaisseur matérielle ;

et enfin le tenir parfaitement immobile pendant qu'on tend le fil.

76. Une partie de ces difficultés peut être évitée en rabattant successivement les différents plans horaires, comme on l'a fait dans la figure 3ᵉ. Alors, plaçant le châssis sur l'axe rabattu AC″, le fil de soie tendu le long de la ligne qui marque la déclinaison du jour donnera, par son intersection M avec la ligne horaire, le point cherché de la courbe diurne. C'est faire mécaniquement ce que nous avons fait par le calcul (n° 47) d'une manière bien plus exacte.

Si l'on veut employer ce moyen, qui du reste n'est applicable qu'aux cadrans plans, il faudra remplacer le châssis par un simple carton, car l'opération sera d'autant plus exacte que cet auxiliaire aura moins d'épaisseur.

Les praticiens donnent le nom de *Trigone des signes* au châssis, ou carton, qui leur sert à la détermination mécanique des courbes diurnes.

NOTES.

NOTE PREMIÈRE.

Quand on trace les *lignes horaires* d'un cadran au-delà de deux ou trois heures avant et après midi, il arrive que les valeurs de r sont quelquefois assez grandes pour qu'on ne puisse pas les porter sur le cadran. Voici un moyen graphique d'y suppléer. Il est fondé sur ce que les plans horaires, à six heures d'intervalle, sont perpendiculaires entre eux; par exemple celui de X heures sur celui de IV heures, parce que l'angle horaire compris entre deux plans consécutifs étant de 15°, il est de six fois 15, ou 90°, pour les plans en question.

Supposons donc qu'on ait déjà tracé six lignes horaires AB, AE.... AD (fig. 8), et qu'on en veuille une septième AG, dont le point de rencontre avec l'équinoxiale serait trop éloigné pour se trouver sur le cadran. Par un point quelconque a de la ligne AB nous imaginerons un plan parallèle au plan horaire SAD; sa trace bc sur le cadran sera parallèle à AD. D'ailleurs, ainsi qu'il vient d'être dit, ce plan sera perpendiculaire au plan horaire SAB, éloigné de six heures du précédent; par conséquent il contiendra la droite perpendiculaire à SAB et passant par le point *a*, laquelle se projette indéfiniment en *mn* à angle droit sur la trace AB du plan horaire.

D'un autre côté, tous les plans horaires passent par l'axe AS; par conséquent, leurs intersections *bm* et *cn*, avec le plan de construction, sont des lignes parallèles à AS; et, comme elles sont dans un même plan avec la perpendiculaire *mn* et la parallèle *bc*, ces lignes se rencontrent, et forment, entre les plans voisins, deux triangles *abm*, *acn*, qui sont égaux, puisque les parties *am*, *an*, de la perpendiculaire au plan SAB, et comprises entre trois plans consécutifs, sont égales. Donc, on peut déterminer la ligne AG de la manière suivante : Par un point quelconque *a* de la ligne AB qui précède, on mène une parallèle *cab* à la ligne horaire AD, éloignée de six heures; on porte la longueur *ab* en *ac*, et le point *c*, conjointement avec le centre A du cadran, détermine la ligne cherchée AG.

Dans la pratique, on ne peut pas construire une parallèle par les procédés graphiques ordinaires. Voici donc comment il faudra opérer : On prendra sur la ligne AD un point *a'* qui soit à la même distance que le point *a* de l'équinoxiale BD; du point *a'* on abaisse une perpendiculaire *a'p*, et l'on forme un triangle *a'p*D, qui, convenablement reporté au point *a*, donne la direction de la ligne cherchée *bc*.

Pour plus d'exactitude, on portera le même triangle au-dessus du point *a*, et en le retournant, le long de la perpendiculaire abaissée de *a* sur BD. On aura ainsi trois points qui devront se trouver en ligne droite.

NOTE DEUXIÈME.

Méthode approximative pour tracer, sur un cadran horizontal ou vertical direct, la courbe du temps moyen.

On détermine, sur la méridienne, l'extrémité de l'ombre à un jour donné par la formule

$$l = a\frac{\cos\delta}{\sin(L+\delta)} \quad \text{ou} \quad l = a\frac{\cos\delta}{\sin(L-\delta)} \text{ (1)}$$

suivant qu'il s'agit d'un cadran horizontal ou vertical.

Par ce point on élève une perpendiculaire à la méridienne. On partage en 900 parties égales la portion de cette perpendiculaire comprise entre la méridienne et la ligne de $^1/_4$ d'heure avant ou après midi (il y a 900 secondes dans un quart d'heure).

Puis on prend autant de ces parties qu'il y a de secondes dans l'équation du temps, relative au jour dont on s'occupe ; on les porte sur la perpendiculaire à partir de la méridienne ; le point que détermine l'ouverture du compas appartient à la courbe.

Ce procédé approximatif, où le compas de proportion serait utilement employé, est fondé sur ce que les courbes diurnes diffèrent très-peu des perpendiculaires à la méridienne, dans l'espace compris entre cette méridienne et la ligne horaire de $^1/_4$ d'heure, que les angles y sont proportionnels aux temps, et que, dans ce court intervalle, le mouvement du soleil est sen-

---

(1) La formule est $l = a\dfrac{\cos\delta}{\cos(L' + \delta)}$ pour une ligne horaire quelconque ; mais elle devient, pour la méridienne, $l = a\dfrac{\cos\delta}{\sin(L-\delta)}$

siblement uniforme. On peut s'en servir pour *dégrossir* la courbe; il offre même un utile contrôle. Mais si l'on veut de l'exactitude, on ne peut pas se dispenser de recourir au calcul. D'ailleurs, le procédé n'est plus applicable aux cadrans obliques, parce que les lignes diurnes n'y sont plus perpendiculaires à la méridienne, et qu'elles coupent cette ligne sous des angles différents, comme on le voit très-clairement sur la figure supplémentaire (pl. 5).

NOTE TROISIÈME.

Si dans les formules du cadran vertical *oblique* on fait $\mu = o$ et $v = o$, on doit retomber sur celles du cadran vertical direct. C'est en effet ce qui arrive.

On a d'abord $r = h' \text{ tang } \omega$, et comme $h' = h$ dans le cas actuel, à cause de $\sin v = o$, et $\text{tang } \omega = \frac{b}{h} \text{ tang H}$, il vient $r = b \text{ tang H}$, comme dans le cadran vertical direct.

Ensuite, $\text{tang } \alpha = \frac{r}{(q + q')} = \frac{b \text{ tang H}}{h (\text{tang L} + \cot \text{L})}$;

ou, en mettant pour h sa valeur $b \sin \text{L}$,

$$\text{tang } \alpha = \text{tang H} . \cos \text{L},$$

formule pareille.

Troisièmement, $\cos \text{L}' = \frac{a \sin \alpha}{r} = \frac{a \sin \alpha}{b \text{ tang H}}$

et comme $\frac{a}{b} = \text{tang L}$, on a :

$$\cos^2 \text{L}' = \text{tang}^2 \text{L} . \frac{\sin^2 \alpha}{\text{tang}^2 \text{H}}$$

et, puisque $\tang \alpha = \tang H \cos L$,

on a $\sin^2 \alpha = \dfrac{\tang^2 H \cos^2 L}{1 + \tang^2 H \cos^2 L}$;

on a aussi $\cos^2 L' = \dfrac{1}{1 + \tang^2 L'}$. Donc

$$\tang^2 L' = \frac{\tang^2 H - \tang^2 L \left(\dfrac{\tang^2 H \cdot \cos^2 L}{1 + \tang^2 H \cos^2 L}\right)}{\tang^2 L \left(\dfrac{\tang^2 H \ . \cos^2 L}{1 + \tang^2 H \cos^2 L}\right)}$$

quantité qui se réduit à $\tang^2 L' = \cot^2 L \sec^2 H$, et par conséquent $\tang L' = \dfrac{\cot L}{\cos H}$, formule pareille.

NOTE QUATRIÈME.

Calculs du cadran oblique et incliné.

Pour ne pas donner trop d'étendue au texte, nous n'avons fait qu'indiquer la marche à suivre (n° 66) pour tracer un cadran sur un plan incliné et déclinant. Nous donnerons dans cette note un peu plus de détails.

On calculera d'abord, par les procédés de l'article 2, les valeurs des coordonnées rectangulaires d'un cadran vertical, ayant même base et même obliquité que le cadran incliné. Les données pour ces calculs seront :

Latitude $= L$, déviation $= \mu$, hauteur $= h$,

en se rappelant que cette dernière quantité est la distance de l'extrémité du style à la méridienne verticale. Ses projections, qu'on regarde aussi comme données du problème, sont :

$$k' = h \cos \mu \qquad \text{et} \qquad k'' = h \sin \mu.$$

On met toutes ces données en nombres; puis on fait un tableau pareil à celui du numéro 53, pour obtenir les valeurs de x et de y des différents points de la courbe méridienne, ou du temps moyen. On transforme ensuite ces coordonnées en transportant leur origine du centre du cadran au pied de la méridienne; pour cela, on retranche de la distance connue ρ, qui existe entre ces deux points, toutes les valeurs de x, lesquelles deviennent ainsi $(\rho - x)$, à partir de la nouvelle origine. Celles de y restent les mêmes. Ce sont ces valeurs qui forment les deux premières colonnes du tableau suivant.

Pour passer du cadran vertical au cadran incliné formant avec celui-ci un angle ξ, on calcule d'abord, et une fois pour toutes, les quantités

$$i = k \operatorname{tang} \xi\,, \qquad \text{par la formule [1]}$$

k étant en projection la distance de l'horizontale du style à la base du cadran,

$$\operatorname{tang} o = \operatorname{tang} \mu . \operatorname{tang} \xi\,, \qquad \text{par la formule [2].}$$

Puis on forme le tableau suivant :

VALEURS DE							VALEURS DE	
x	y	ε	$\varepsilon + o$	z	$k - z$	$k - x$	x'	y'

Ainsi qu'il vient d'être dit, les deux premières colonnes sont remplies par les valeurs de x et de y, qui représentent les coordonnées courantes du cadran vertical, à partir de l'origine, située au point d'intersection de la méridienne avec la base de ce cadran.

On calcule ensuite les angles ε par la formule [4]; on en déduit $(\varepsilon + \omega)$. Ces quantités, calculées et inscrites par ordre, remplissent les troisième et quatrième colonnes.

Il faut ensuite déterminer x' par la formule [5], et en former la huitième colonne du tableau.

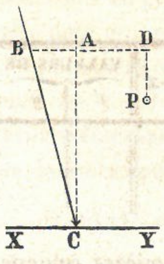
La valeur de z s'obtient par la formule [7]. On en déduit $(k - z)$, par simple soustraction. La quantité $(k - x)$ s'obtient de même. Ces valeurs, enregistrées à mesure et successivement, remplissent les trois colonnes suivantes.

Enfin l'équation [6] donne les valeurs de y', qui ont le même signe que celles de y, et forment la dernière colonne.

C'est avec ces coordonnées que l'on construira, sur le cadran incliné, la courbe du temps moyen (fig. 12).

Construction de la méridienne.

Mais les coordonnées x', y', ne sont plus rectangulaires; elles sont parallèles à la méridienne inclinée du cadran et à sa base. Il faut donc commencer par construire cette méridienne.



A cet effet, on portera sur la perpendiculaire CA, à la trace XY, une longueur $AC = \frac{k}{\cos \xi}$ (n° 62). Par le point A on mènera l'horizontale AB, qu'on fera égale à k tang ξ. tang μ (n° 60). L'hypothénuse CB donnera la direction de la méridienne inclinée, ou de l'axe des x'; celui des y' est CX. Les ordonnées sont positives à gauche de CB, négatives à droite.

Construction des lignes horaires.

Les lignes horaires du cadran incliné devant passer par les mêmes points de la base XY que les lignes horaires du cadran vertical, il suffit de déterminer un seul point de chacune d'elles. Ce point, on le prend sur l'horizontale AB prolongée. Sa distance au point B est donnée par la formule [3]

$$c' = c\left(\frac{h' + i}{h'}\right),$$

dans laquelle c' est cette distance, et c la distance correspondante et connue sur le cadran vertical (n^0 61).

On a donc, sur le cadran incliné, les lignes horaires aussi bien que la méridienne tracées directement, et la courbe du temps moyen déterminée par points.

Courbes diurnes.

Si l'on veut de plus les courbes diurnes, il suffit de calculer la valeur de x' au moyen de x, pour chaque point où la courbe diurne coupe une ligne horaire, parce qu'en menant une horizontale à la distance x', prise sur la méridienne inclinée, à partir de son pied, l'intersection de cette horizontale avec la ligne horaire correspondante détermine le point de la courbe. Pour obtenir la valeur de x, d'où dépend celle de x', on se contentera de mesurer, sur le cadran vertical, la distance du point dont on s'occupe à la base; une plus grande exactitude serait sans utilité.

Position du style.

Pour fixer la position du style, on détermine son pied P sur le plan du cadran, en faisant (n^0 67) AD égale à h'', et prenant pour DS la longueur $(i + h')\sin\xi$.

Par le point P on élève ensuite une perpendiculaire au plan, égale à $(i + h')\cos\xi$. Son extrémité détermine la position du style, ou plutôt celle du trou de la plaque qui doit le remplacer.

Si l'on voulait poser le style lui-même, il faudrait faire passer la tige par ce point et par le centre du cadran, ou point de concours des lignes horaires.

Le cadran oblique et incliné est donc complètement déterminé; on peut le tracer avec autant d'exactitude que le cadran vertical.

Fig. 1.e

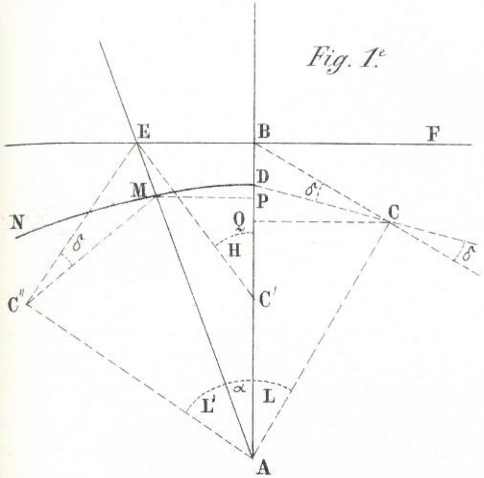


Fig. 2.e

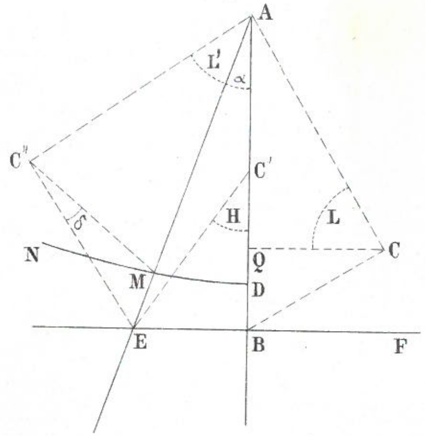


Fig. 3.e

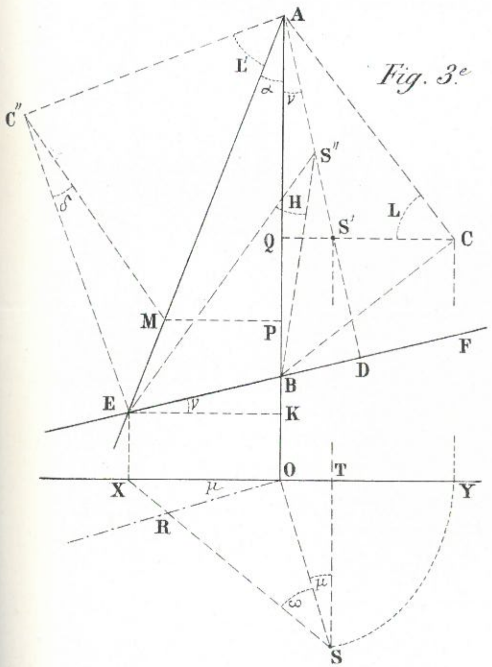


Fig. 4.e

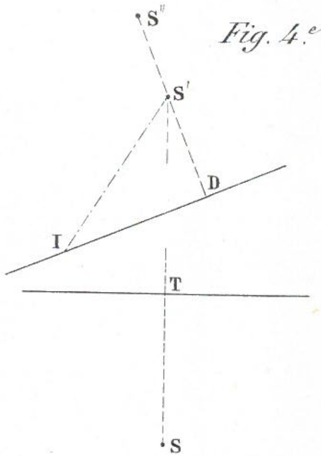


Fig. 6.e

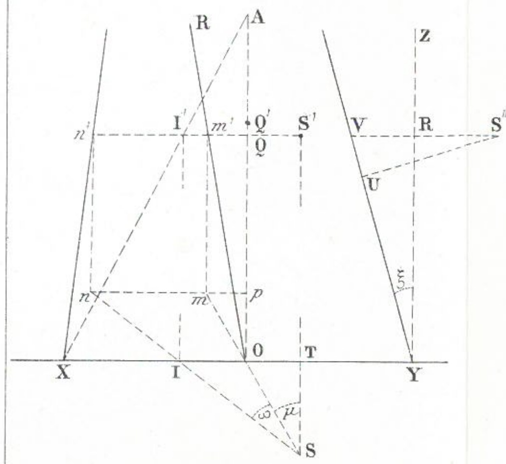


Fig. 7.e

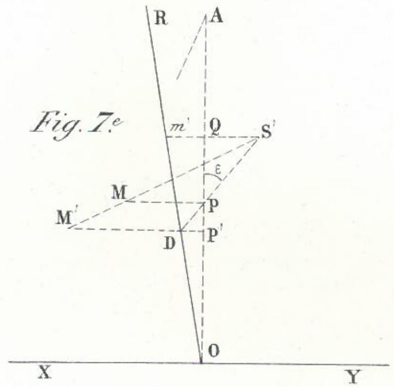


Fig. 5.e

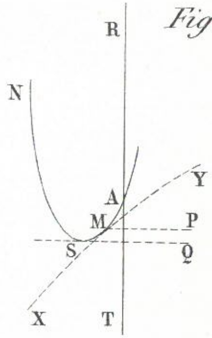
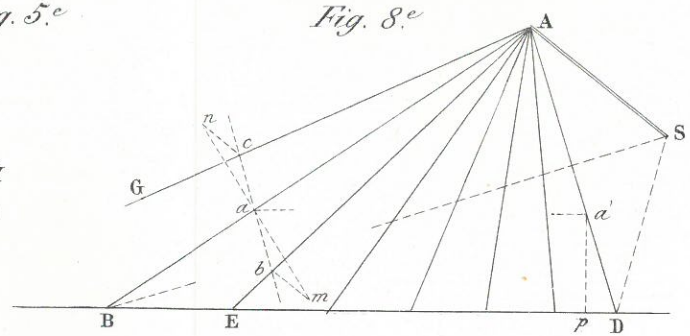


Fig. 8.e



Cadran horizontal. *Cadran vertical direct.*

Fig. 9.

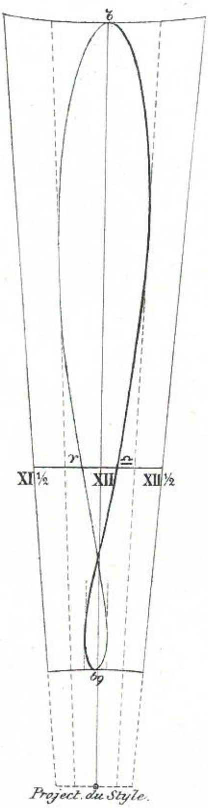
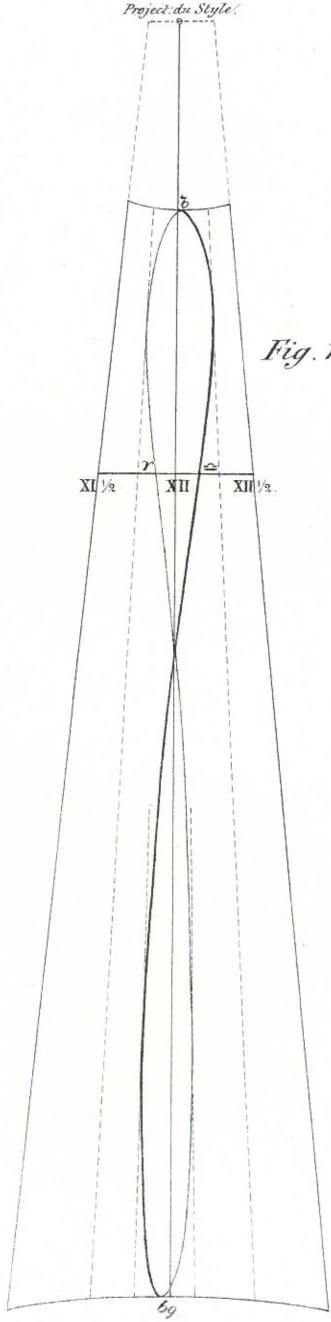


Fig. 10.



Données communes.

$L = 40°$

$h = 0^m.70$

Echelle au $\frac{1}{20}$.

Cadran vertical oblique.

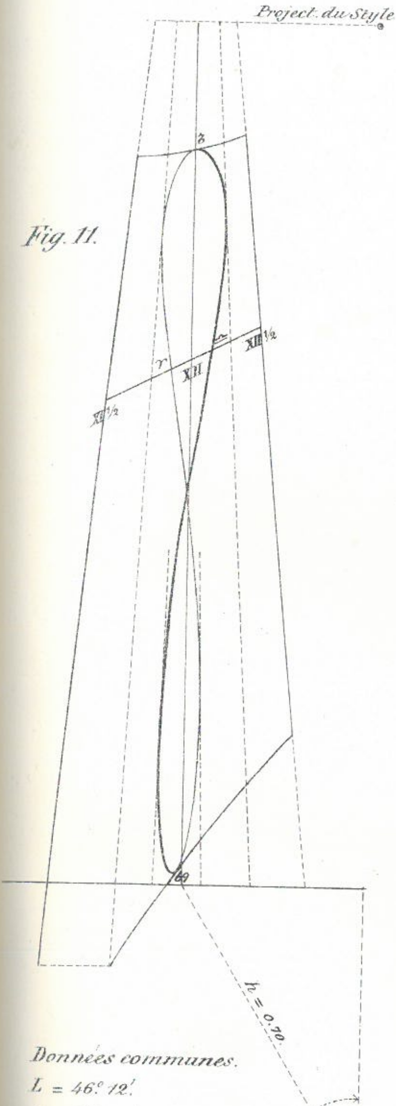


Fig. 11.

Cadran oblique et incliné.

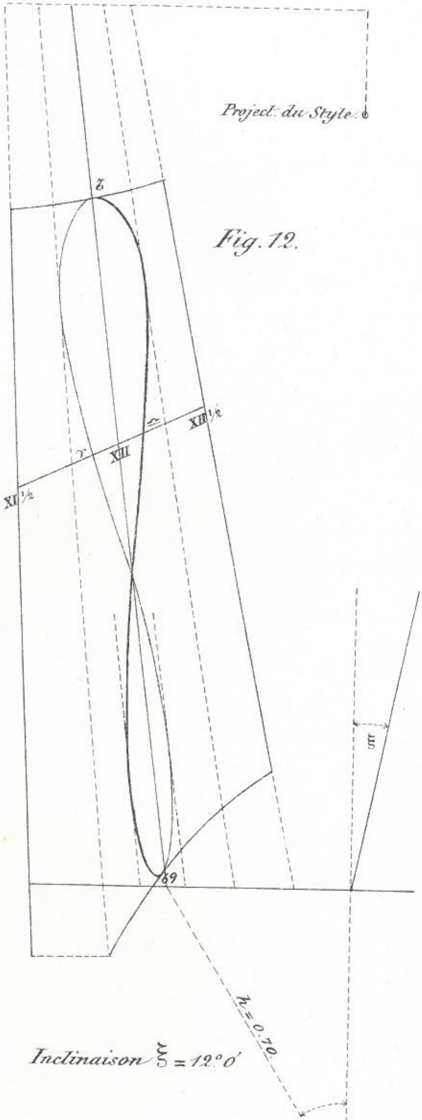


Fig. 12.

Données communes.

$L = 46^\circ\, 12'$.

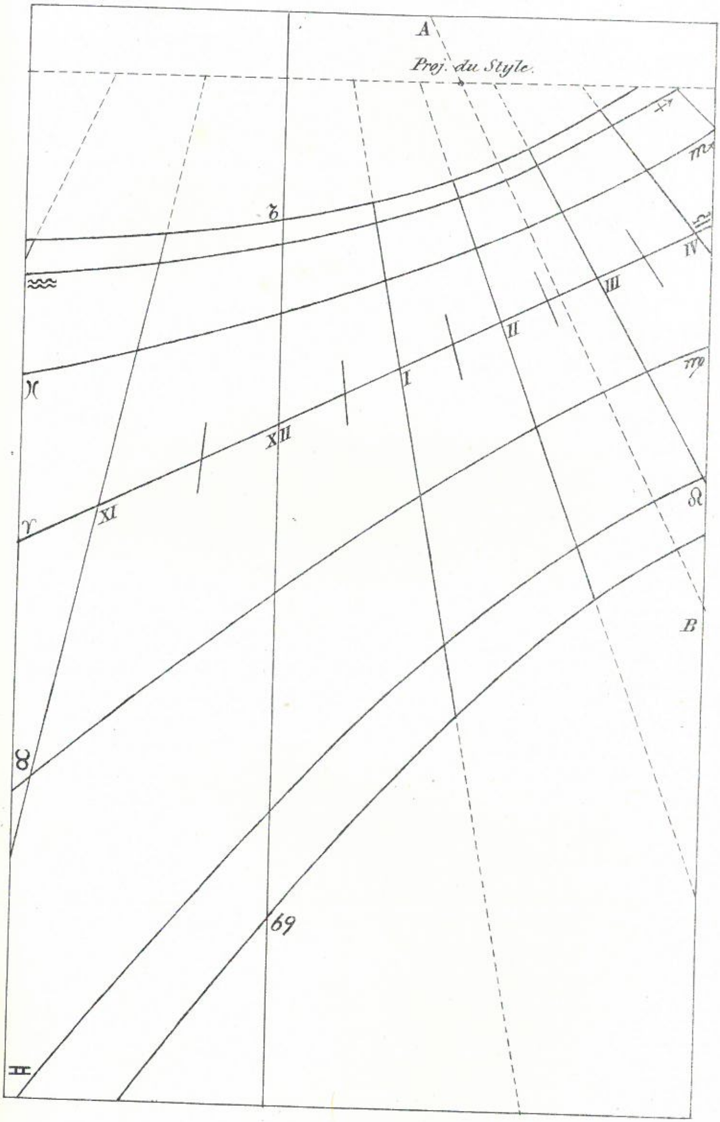
$\mu = 31^\circ\, 44'$.

$h = 0^m\, 70$.

Inclinaison $\xi = 12^\circ\, 0'$

Echelle au $\frac{1}{15}$

Figure Supplémentaire.



Données : $L = 46°$, $\mu = 30°$, $h = 0^{m}.70$.

Echelle au $\frac{1}{15}$